数学活动课程讲座

平方差公式在初中数论问题中的应用

邓 超
（福建省福州市第十八中学象园校区，350005）

中图分类号：O156.1 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2017)05-0002-04

（本讲适合初中）

平方差公式

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

在初中数学竞赛解题时常常起到不可替代的作用．巧妙灵活地运用公式可以方便地解决有关不定方程、完全平方数的问题．

1 基本知识

命题 关于 x、y 的不定方程

$$x^2-y^2=m(m\in\mathbf{Z}) \quad ①$$

有整数解的充分必要条件是

$m\neq 4k+2(k\in\mathbf{Z})$.

证明 必要性．

注意到，

$$m=x^2-y^2=(x+y)(x-y). \quad ②$$

因为 $(x+y)+(x-y)=2x$ 是偶数，所以，$x+y$ 与 $x-y$ 奇偶性相同．

若 $x+y$ 与 $x-y$ 同为奇数，则 m 为奇数；

若 $x+y$ 与 $x-y$ 同为偶数，则 $4|m$.

因此，$m\neq 4k+2(k\in\mathbf{Z})$.

充分性．

若 $m\neq 4k+2(k\in\mathbf{Z})$，则 $4|m$ 或 m 为奇数．

下面分类讨论．

（1）若 $4|m$，则设 $m=4k(k\in\mathbf{Z})$.

令 $\begin{cases}x+y=2k,\\x-y=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=k+1,\\y=k-1.\end{cases}$

故 $\begin{cases}x=k+1,\\y=k-1\end{cases}$ 为方程①的一组整数解．

（2）若 m 为奇数，则设

$m=2k+1(k\in\mathbf{Z})$.

令 $\begin{cases}x+y=2k+1,\\x-y=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=k+1,\\y=k.\end{cases}$

故 $\begin{cases}x=k+1,\\y=k\end{cases}$ 为方程①的一组整数解．

综上，若 $m\neq 4k+2(k\in\mathbf{Z})$，则原不定方程①有整数解．

【注】若形如式②的不定方程有整数解且 m 为偶数时，m 一定可被 4 整除，此时，$x+y$、$x-y$ 均为偶数．

2 例题讲解

例1 求不定方程 $x^2=y^2+2y+13$ 的所有整数解．[1]

（第 46 届莫斯科数学奥林匹克）

解 原方程可化为

$x^2-(y+1)^2=12$.

由平方差公式得

$(x+y+1)(x-y-1)=12$.

因为 $x+y+1$、$x-y-1$ 有相同的奇偶性，且 12 为偶数，所以，

$$\begin{aligned}&(x+y+1,x-y-1)\\&=(2,6),(6,2),(-2,-6),(-6,-2)\\&\Rightarrow(x,y)=(4,-3),(4,1),(-4,1),\\&\qquad(-4,-3).\end{aligned}$$

收稿日期：2016-11-28 修回日期：2017-02-15

例 2　证明:40…09(其中至少有一个 0)不是完全平方数.[2]

(1995,环球城市数学竞赛(初中组))

证明　设 $40\cdots09=4\times10^n+9(n>1)$.

只要证 $4\times10^n+9=a^2$ 没有正整数解.

由平方差公式得

$4\times10^n=a^2-9=(a+3)(a-3)$.

因为 $(a+3)-(a-3)=6$ 不能被 5 整除,所以,$a+3$、$a-3$ 中只有一个被 5 整除.

由于 4×10^n 能被 5^n 整除,于是,

$5^n\mid(a+3)$ 或 $5^n\mid(a-3)$.

又 $4\mid(a+3)(a-3)$,则 $a+3$、$a-3$ 同为偶数.

若 $5^n\mid(a-3)$,则 $2\times5^n\mid(a-3)$.

于是,$a-3\geqslant2\times5^n$.

从而,$a+3\leqslant2\times2^n$.

因此,$2\times2^n\geqslant2\times5^n$,这在 $n>1$ 时是不可能的.

故 $5^n\mid(a-3)$ 不成立,得 $5^n\mid(a+3)$.

设 $a+3=2^m\times5^n,a-3=2^{n+1-m}(m\geqslant1)$.

两式相减得

$6=2^m\times5^n-2^{n+1-m}\geqslant2\times5^n-2^n>6$

(这可由数学归纳法得证),矛盾. 则 $4\times10^n+9=a^2$ 没有正整数解满足 $n>1$,即 40…09(其中至少有一个 0)不是完全平方数.

例 3　证明:不定方程

$$x^2+y^2-z^2=1\,997 \quad ①$$

有无穷多组整数解.[2]

(1997,环球城市数学竞赛(初中组))

证明　由方程①得

$$y^2-z^2=1\,997-x^2. \quad ②$$

由命题,知当 $1\,997-x^2$ 为奇数时,方程②总有整数解,此时,x 为偶数.

令 $x=2t(t\in\mathbf{Z})$.

则方程②为

$(y+z)(y-z)=1\,997-4t^2$.

令 $\begin{cases}y+z=1\,997-4t^2,\\ y-z=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}y=999-2t^2,\\ z=998-2t^2.\end{cases}$

故 $(x,y,z)=(2t,999-2t^2,998-2t^2)$ 为不定方程①的解.

令 t 取遍所有的整数,即得到该方程的无穷多组整数解.

例 4　求所有的正整数 k,使得存在正整数 m、n 满足

$$m(m+k)=n(n+1).^{[3]} \quad ①$$

(2003,环球城市数学竞赛(初中组))

解　显然,$k=1$ 符合要求,此时,$m=n$.

当 $k>1$ 时,显然有 $m<n$.

故 $k=\dfrac{n(n+1)}{m}-m\geqslant\dfrac{n(n+1)}{n-1}-n+1>3$.

当 $k\geqslant4$ 时,由方程①得

$(4m^2+4mk+k^2)-k^2+1=4n^2+4n+1$

$\Rightarrow(2m+k)^2-(2n+1)^2=k^2-1$.

由平方差公式得

$$(2m+k+2n+1)(2m+k-2n-1)=k^2-1. \quad ②$$

令 $\begin{cases}2m+k+2n+1=k^2-1,\\ 2m+k-2n-1=1.\end{cases}$

解得 $(m,n)=\left(\dfrac{k^2-2k}{4},\dfrac{k^2}{4}-1\right)$.

为了使 m、n 均为整数,k 应取偶数,令 $k=2t(t\in\mathbf{Z}_+,t>1)$.

则 $(m,n)=(t^2-t,t^2-1)$.

若 k 为奇数,令 $k=2t+1(t\in\mathbf{Z}_+,t>1)$.

则方程②化为

$(2m+2t+2n+2)(2m+2t-2n)=4t^2+4t$.

令 $\begin{cases}2m+2t+2n+2=2t^2+2t,\\ 2m+2t-2n=2.\end{cases}$

解得 $(m,n)=\left(\dfrac{t^2-t}{2},\dfrac{t^2+t}{2}+1\right)$.

易知,当 t 为整数时,m、n 均为整数.

综上,当 $k=1$ 或 $k\geqslant4$ 时,存在正整数 m、n 满足方程①.

例5 证明:数 97^{97} 不能表示为若干个连续整数的立方和.[2]

(1997,环球城市数学竞赛(初中组))

证明 利用立方和求和公式:

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

事实上,只需证明 97^{97} 不能表示为若干个连续正整数的立方和即可.

假设存在 $m、n\in\mathbf{N}$,使得

$$97^{97}=(m+1)^3+(m+2)^3+\cdots+(n-1)^3+n^3.$$

则 $97^{97}=(1^3+2^3+\cdots+n^3)-(1^3+2^3+\cdots+m^3)$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

故 $n^2(n+1)^2-m^2(m+1)^2=4\times97^{97}$.

利用平方差公式,因式分解得

$$(n(n+1)+m(m+1))(n(n+1)-m(m+1))=4\times97^{97}.$$

设 $n(n+1)+m(m+1)=2\times97^s(s\in\mathbf{N}_+)$,

$n(n+1)-m(m+1)=2\times97^t(t\in\mathbf{N})$.

则 $n(n+1)-m(m+1)$

$=(n+m+1)(n-m)=2\times97^t$.

分两种情形考虑.

(1) $\begin{cases}n+m+1=2\times97^r,\\ n-m=97^{t-r}\end{cases}(r\in\mathbf{N}_+,t\geqslant r)$.

解得 $\begin{cases}m=\dfrac{2\times97^r-97^{t-r}-1}{2},\\ n=\dfrac{2\times97^r+97^{t-r}-1}{2}.\end{cases}$

故 $n(n+1)+m(m+1)$

$$=\frac{(2\times97^r+97^{t-r})^2+(2\times97^r-97^{t-r})^2-2}{4}$$

$$=97^{2r}+\frac{97^{2t-2r}-1}{2}=2\times97^s.$$

于是,$2\times97^{2r}+97^{2t-2r}-1=4\times97^s$. ①

因为 $s\geqslant1,r\geqslant1$,所以,$2t-2r=0$(否则,式①的左边不能被 97 整除).

于是,$97^{2r}=2\times97^s$,这不可能.

(2) $\begin{cases}n+m+1=97^r,\\ n-m=2\times97^{t-r}\end{cases}(r\in\mathbf{N}_+,t\geqslant r)$.

解得 $\begin{cases}m=\dfrac{97^r-2\times97^{t-r}-1}{2},\\ n=\dfrac{97^r+2\times97^{t-r}-1}{2}.\end{cases}$

故 $n(n+1)+m(m+1)$

$$=\frac{(97^r+2\times97^{t-r})^2+(97^r-2\times97^{t-r})^2-2}{4}$$

$$=\frac{97^{2r}-1}{2}+97^{2t-2r}=2\times97^s.$$

于是,$97^{2r}-1+2\times97^{2t-2r}=4\times97^s$. ②

因为 $s\geqslant1,r\geqslant1$,所以,$2t-2r=0$(否则,式②的左边不能被 97 整除).

于是,$97^{2r}+1=2\times97^s$,这不可能.

综上,97^{97} 不能表示为若干个连续正整数的立方和.

例6 试求满足方程 $2^x+3^y=z^2$ 的非负整数 $x、y、z$.[1]

(1997,湖北省黄冈市数学竞赛)

解 若 $y=0$,则

$2^x=z^2-1=(z+1)(z-1)$.

设 $\begin{cases}z+1=2^s,\\ z-1=2^t\end{cases}(s>t,x=s+t)$.

两式相减得 $2^s-2^t=2$.

解得 $t=1,s=2$.

此时,$x=3,y=0,z=3$.

若 $y>0$,则

$2^x+3^y\equiv(-1)^x(\bmod 3)$.

若 x 为奇数,则

$z^2\equiv2^x+3^y\equiv2(\bmod 3)$,

这不可能.

因此,x 为偶数,设 $x=2a$.

则 $3^y=z^2-2^{2a}=(z+2^a)(z-2^a)$.

设 $\begin{cases}z+2^a=3^s(s\geqslant1),\\ z-2^a=3^t(t\geqslant0).\end{cases}$

两式相减得 $2^{a+1}=3^s-3^t$.

解得 $t=0$. 故 $2^{a+1}=3^s-1$.

若 $a=0$,则 $s=1$.

此时,$x=0,y=1,z=2$.

若 $a>0$,则

$2^{a+1}\equiv 3^s-1\equiv(-1)^s-1\equiv 0(\bmod 4)$.

此时,s 必为偶数,设 $s=2b$.

则 $2^{a+1}=3^{2b}-1=(3^b+1)(3^b-1)$.

设$\begin{cases}3^b+1=2^m,\\3^b-1=2^n\end{cases}(m+n=a+1)$.

两式相减得 $2^m-2^n=2$.

解得 $m=2,n=1$.

此时,$x=4,y=2,z=5$.

综上,原方程共有三组解.

【注】本题通过适当取模,证得相关的指数为偶数,为平方差公式的应用创造了条件. 对这类指数型的不定方程,常常采用适当取模的方法.

练 习 题

1. 求所有使得 m^2+m+7 为完全平方数的正整数. [1]

提示 设 $m^2+m+7=n^2$.

方程两边乘以 4 得

$4m^2+4m+28=4n^2$,

即 $4n^2-(2m+1)^2=27$.

再运用平方差公式,解得 $m=1,6$.

2. 将一个正方形分割成为 25 个小正方形,其中 24 个小正方形为单位正方形,余下的一块仍可切为一些边长为 1 的正方形. 试求原正方形的面积. [2]

(1997,环球城市数学竞赛(初中组))

提示 设原正方形边长为 a,余下的一块正方形边长为 b.

由题意,知 a、b 均为正整数.

于是,$a^2-b^2=24$,只需解这个不定方程即可.

解得$\begin{cases}a=7,\\b=5\end{cases}$或$\begin{cases}a=5,\\b=1\end{cases}$(舍去).

故面积为 49.

3. 考虑方程 $x^2+y^3=z^2$ 的正整数解是有限多组还是无限多组? [2]

(1993,环球城市数学竞赛(高中组))

提示 将原方程变形为 $z^2-x^2=y^3$,再利用平方差公式. 一共有无限多组正整数解.

4. 已知一个整数的平方的十进制最后两位的数码为 09. 证明:此数平方的百位数字为偶数. [3]

(1998,环球城市数学竞赛(初中组))

提示 设这个整数为 a,且 $a^2=\overline{b09}$.

则 $a^2=100b+9$.

由平方差公式得

$(a+3)(a-3)=100b$.

故 $a+3$、$a-3$ 均为偶数.

易证 $8\mid(a+3)(a-3)$.

于是,$8\mid 100b$,得 $2\mid b$.

5. 求所有的三元数组 (m,n,p),满足

$p^n+144=m^2$(m、$n\in\mathbf{Z}_+$,p 为素数). [4]

(第 22 届意大利数学奥林匹克)

提示 将原方程转化为

$p^n=(m+12)(m-12)$.

答案为

$(m,n,p)=(13,2,5),(20,8,2),(15,4,3)$.

参考文献:

[1] 沈文选,张垚,吴仁芳 编著. 初中数学竞赛中的数论问题[M]. 长沙:湖南师范大学出版社,2011.

[2] 中国数学奥林匹克委员会 编译. 环球城市数学竞赛问题与解答(第 2 册)[M]. 北京:开明出版社,2004.

[3] 林常 编译. 环球城市数学奥林匹克试题解[M]. 杭州:浙江大学出版社,2011.

[4] 《中等数学》编辑部 编. 国内外数学奥林匹克试题精选(2002—2012)数论部分[M]. 杭州:浙江大学出版社,2015.