偶函数的一个性质及其应用

邓　超（福建省福州市第十八中学象园校区　350005）

邓超　2006 年 6 月毕业于闽江学院数学系，获理学学士学位。同年 8 月进入福建省福州市第十八中学，中学数学二级教师。

性质　若函数 $f(x)$ 是偶函数，对于它的定义域内任取一个数 x，都有

$$f(-x)=f(x)=f(|x|)=f(-|x|).$$

1. 解不等式

例 1　设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^3-8(x\geqslant 0)$，则 $\{x\mid f(x-2)>0\}=$（　　）

(A) $\{x\mid x<-2$ 或 $x>4\}$.

(B) $\{x\mid x<0$ 或 $x>4\}$.

(C) $\{x\mid x<0$ 或 $x>6\}$.

(D) $\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$.

分析　这道题的常规思路是利用函数的奇偶性求出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的解析式. 然后再分 $x-2\geqslant 0$ 和 $x-2<0$ 两种情况讨论. 如此求解，则显麻烦，若用上述性质可以不求解析式，也无须分类讨论.

解　因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(x)=f(|x|)=|x|^3-8$，

从而 $f(x-2)=f(|x-2|)=|x-2|^3-8$.

由于 $f(x-2)>0$，

即 $|x-2|^3-8>0$，

解得 $x>4$ 或 $x<0$.

2 求参数范围

例 2　$f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的偶函数，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，若 $f(1-m)<f(m)$，求实数 m 的取值范围.

分析　因为 $1-m$ 和 m 的符号不确定，所以这道题的常规思路是对 $1-m$ 和 m 的符号分四种情况讨论，比较繁琐. 以下利用文首的性质解决.

解　因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(x)=f(|x|)$，

从而不等式 $f(1-m)<f(m)$ 可转换成

$$f(|1-m|)<f(|m|).$$

又因为当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递减，

则有 $|1-m|>|m|$.

又 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上，

所以 $-1\leqslant 1-m\leqslant 1$ 且 $-1\leqslant m\leqslant 1$，

于是得到不等式组 $\begin{cases}|1-m|>|m|,\\-1\leqslant 1-m\leqslant 1,\\-1\leqslant m\leqslant 1,\end{cases}$

解得 $0\leqslant m<\dfrac{1}{2}$，

所以实数 m 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$.

例 3　已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，若 $f(\sqrt{a^2-a-2})>f(2a-1)$，求实数 a 的取值范围.

解　因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(x)=f(-|x|)$，

即 $f(\sqrt{a^2-a-2})=f(-\sqrt{a^2-a-2})$，

$$f(2a-1)=f(-|2a-1|),$$

故原不等式可化为

$$f(-\sqrt{a^2-a-2})>f(-|2a-1|),$$

又因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，

所以 $-\sqrt{a^2-a-2}>-|2a-1|$，

解得　该不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

又 $f(\sqrt{a^2-a-2})$ 有意义，

所以 $a^2-a-2\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 2$.

故实数 a 的取值范围为

$$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty).$$

3 比较大小

例 4　$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，又 $x_1>0$，$x_2<0$，且 $x_1+x_2>0$，则（　　）

(A) $f(x_1)=f(x_2)$.

(B) $f(x_1)>f(x_2)$.

(C) $f(x_1)<f(x_2)$.

(D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定.

解　因为 $x_1>0$，$x_2<0$，且 $x_1+x_2>0$，所以由实数的加法法则有 $|x_1|>|x_2|$.

由于　　$f(x)$ 是偶函数，

所以　　$f(x)=f(-|x|)$，

从而　　$f(x_1)=f(-|x_1|)$，

$$f(x_2)=f(-|x_2|).$$

又　　$|x_1|>|x_2|$，

所以　　$-|x_1|<-|x_2|<0$.

因为　$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，

所以　　$f(-|x_1|)>f(-|x_2|)$，

故　　$f(x_1)>f(x_2)$.

（上接第4页）

自线段的中点，但是在各自线段中所占的比例是一样的 $(D_1P=\frac{4}{5}D_1E, C_1M=\frac{4}{5}C_1C)$.

解法2　坐标法

如图7所示，以 D 为原点，建立空间直角坐标系.

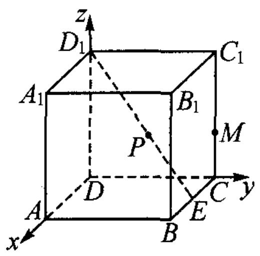

图7

易知　$D_1(0,0,2)$，

$E(1,2,0)$.

在线段 CC_1 上任取一点 M，

设 $M(0,2,t)$，其中

$0\leqslant t\leqslant 2$.

设 $P(x,y,z)$.

因为 D_1、P、E 三点共线，故可设

$$\overrightarrow{D_1P}=\lambda\overrightarrow{D_1E}, 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

则　　$(x,y,z-2)=\lambda(1,2,-2)$，

解得　　$P(\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，

因此　　$|PM|=|\overrightarrow{PM}|$

$$=\sqrt{\lambda^2+(2\lambda-2)^2+(2-2\lambda-t)^2},$$

化简得　　$|PM|$

$$=\sqrt{5\left(\lambda-\frac{4}{5}\right)^2+(2-2\lambda-t)^2+\frac{4}{5}},$$

当且仅当 $\begin{cases}\lambda-\frac{4}{5}=0,\\ 2-2\lambda-t=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\ t=\frac{2}{5},\end{cases}$ 时，

$|PM|$ 有最小值 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

下面确定当点 P 到直线 CC_1 的距离取到最小值 $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ 时点 P 和点 M 的位置.

由上可知　　$\lambda=\frac{4}{5}, t=\frac{2}{5}$，

此时 $\overrightarrow{D_1P}=\frac{4}{5}\overrightarrow{D_1E}$，即 $D_1P=\frac{4}{5}D_1E$，

$$CM=t=\frac{2}{5}, C_1M=\frac{8}{5}=\frac{4}{5}C_1C.$$

显然，此时点 P 的位置和点 M 的位置与解法1计算出来的一致.

（上接第5页）

由重心定理知　$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$，

所以　　$\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2m}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2n}\overrightarrow{OQ}$，

即　　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3m}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3n}\overrightarrow{OQ}$，

由于　　P、Q、G 三点共线，

所以　　$\frac{1}{3m}+\frac{1}{3n}=1$，

即　　$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=3$.

例4　平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha+\beta=1$，求点 C 的轨迹方程.

解　因为　$\alpha+\beta=1$，

所以　　A、B、C 三点共线，

即　　点 C 在直线 AB 上，

所以点 C 的轨迹即为直线 AB 的方程，

由直线的两点式方程可得，AB 的方程为

$$x+2y-5=0.$$

例5　已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\overrightarrow{OC}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{2010}\overrightarrow{OB}$，且 A，B，C 三点共线（该直线不过原点），则 $S_{2010}=$______.

解　因为　A、B、C 三点共线，

所以　　$a_1+a_{2010}=1$，

所以　$S_{2010}=\frac{2010(a_1+a_{2010})}{2}=1005$.