争 鸣

评 析

问题 242 问题出在哪里？

本问题共收到评析稿件 7 篇，来稿前三名的作者是：王安寓(江苏省南京市六合区实验高级中学)，周天明 (安徽省合肥市第六中学)，高昌胜(湖北省兴山县第一中学).

多数来稿者认为：解法一和解法二是错误的，解法三的答案是正确的，但解题过程还不够严谨. 部分来稿者认为：解法一的答案是对的，但是解题过程有漏洞，解法二是正确的，解法三的答案是错误的，解题过程与解法一有相同的漏洞. 还有部分来稿者认为：题设条件“A,B,C 三点在一条直线上”容易让学生产生不同的理解，最好明确说明“A,B,C 为不同的三点”.

为方便读者阅读，先给出原题及三种解法.

题目 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是正交单位向量，$\overrightarrow{OA}=2\mathbf{e}_1+m\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{OB}=n\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$，若 A,B,C 三点在一条直线上，且 $m=2n$，求 m,n 的值.

解法一 因为 A,B,C 三点共线，所以 $\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OC}$，将 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 代入，得

$$[n-2x-5(1-x)]\mathbf{e}_1=[1+xm-(1-x)]\mathbf{e}_2,$$

即 $(n+3x-5)\mathbf{e}_1=x(m+1)\mathbf{e}_2$.

因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是正交单位向量，所以 $n+3x-5=0$，且 $x(m+1)=0$.

由 $x(m+1)=0$ 得 $m=-1$ 或 $x=0$.

所以，当 $m=-1$ 时，$n=-\frac{1}{2}$；当 $x=0$ 时，$n=5$，$m=10$.

解法二 因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(n-2)\mathbf{e}_1-(1+m)\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=3\mathbf{e}_1-(1+m)\mathbf{e}_2$.

因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是正交单位向量，所以可以简单记为坐标形式，$\overrightarrow{AB}=(n-2,-1-m)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-1-m)$.

因为 A,B,C 三点在一条直线上，所以 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，所以 $(n-2)(-1-m)=3(-1-m)$，即 $(n-5)(m+1)=0$，所以 $m=-1$ 或 $n=5$.

当 $m=-1$ 时，$n=-\frac{1}{2}$；当 $n=5$ 时，$m=10$.

解法三 因为 A,B,C 三点共线，所以 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$，将 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 代入，整理得 $(m+1)\mathbf{e}_2=(nx-5x+3)\mathbf{e}_1$. 因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是正交单位向量，所以 $m+1=0$，所以 $m=-1$，$n=-\frac{1}{2}$.

选登 1

笔者认为解法一、解法二的答案错误，解法三的答案正确.

解法一和解法三都是运用矢径定理得出答案.

矢径定理 已知 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 不共线，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 A、B、P 三点共线的充要条件是 $x+y=1$.

解法一是用 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OB}$，解法三是用 $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OA}$，形式相同，解题过程类似，不应该出现不同结果. 但事实上是出现了不同的结果. 问题出在哪？

我们先从图形的角度分析，再从数的角度分析.

由于 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是正交单位向量，故我们可以用点的坐标代替向量，即 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 对应 $A(2,m)$、$B(n,-1)$、$C(5,-1)$，显然，直线 BC 的方程为 $y=-1$，而 A,B,C 三点共线，所以 A 点必在直线 BC 上，从而 $m=-1$，又 $m=2n$，所以 $n=-\frac{1}{2}$.

从数据上看，A,B,C 三点共线得到 m,n 的一个方程，再加上 $m=2n$，解方程组必能求出 m,n 的值. 三种解法的区别点是由三点共线得出 m,n 的方程的过程不同，造成了结果的差异. 差异的原因是忽视了“三点”是指“全部不重合的三点”. 解法一中，当 $x=0$ 时，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，即 B 与 C 重合，虽然仍有 A,B,C 三点共线，但与常规的约定相悖，即与 A,B,C 三点都不重合相悖. 同样，解法二中，当 $n=5$ 时，向量

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$,此时,$B$ 与 C 重合,出现矛盾.至此,我们看到,解法一和解法二出现增解,出现增解的原因是忽视了验证 A,B,C 三点都不重合.

那么,解法三为什么正确呢?

解法三中,$\overrightarrow{OA}=y\overrightarrow{OB}+(1-y)\overrightarrow{OC}$,恰好避开了 B、C 重合的可能.事实上,将解法一中的 $\overrightarrow{OA}$ 求出,得到 $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{x}\overrightarrow{OB}+(1-\frac{1}{x})\overrightarrow{OC}$,对比两式,易发现,解法三中的 y 相当于解法一中的 $\frac{1}{x}$,自然将增解 $x=0$ 舍掉而得到正确的答案.从坐标上看,$A(2,m)$、$B(n,-1)$、$C(5,-1)$ 三点中,A 与 C 是不可能重合的,而 B 与 C 有可能重合.故解法三选择用 $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OA}$ 不会出现增解.

从解法一和解法三的对比中,我们发现计算途径的选择很重要.不同的计算途径会造成不同的计算过程,甚至会造成不同的计算结果.因此,对一道题目的求解,要认真思考计算途径,然后才能动手求解.另外,我们也应看到解题检验的重要性.一道题目求解完成后,还要做一个检验——检验求解过程中所用知识、方法的易忽视点和易错点,要养成对易错点易忽视点的敏感性.在求解的过程中,也要注意自己思维的可监控性.

王安寓(江苏省南京市六合区实验高级中学 211500)

选登 2

笔者认为:解法一的答案是对的,但是解题过程有漏洞,解法二是正确的,解法三的答案是错误的,解题过程与解法一有相同的漏洞.解法一和解法三,都用了同一个结论:

若三点 P,Q,R 共线,则 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OQ}+(1-x)\overrightarrow{OR}$.

但是,这个结论有时并不成立.因为 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OQ}+(1-x)\overrightarrow{OR}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}=x(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR})\Leftrightarrow\overrightarrow{RP}=x\overrightarrow{RQ}$,而当 P,Q,R 中恰有 Q,R 两点重合时,$\overrightarrow{RP}\neq\mathbf{0}$,$\overrightarrow{RQ}=\mathbf{0}$,$\overrightarrow{RP}=x\overrightarrow{RQ}$ 不成立.这个结论的证明中,用到了共线向量定理:向量 $\mathbf{a}(\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$ 与 $\mathbf{b}$ 共线,当且仅当有唯一一个实数 λ,使 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$.这里必须保证向量 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.

解法一中,由三点 A,B,C 共线,直接得到 $\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OC}$ 是不正确的,这样做,实际上默认了 A,C 不重合,因此还要讨论 A,C 重合的情形,当 A,C 重合时,$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$,$2\mathbf{e}_1+m\mathbf{e}_2=5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$,因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是单位正交基底,所以 $2\mathbf{e}_1+m\mathbf{e}_2\neq5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$,故 A,C 不重合.因此,解法一的答案是对的,但是解题过程有漏洞.

解法一的解题过程可以完善如下:因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是单位正交基底,所以 $2\mathbf{e}_1+m\mathbf{e}_2\neq5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$,故 A,C 不重合.由三点 A,B,C 共线,直接得到 $\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OC}$,将 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 代入,得 $(n+3x-5)\mathbf{e}_1=x(m+1)\mathbf{e}_2$,因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是单位正交基底,所以 $n+3x-5=0$,且 $x(m+1)=0$.解得 $m=-1,n=-\frac{1}{2}$ 或 $m=10,n=5$.

解法二中,使用了课本上平面向量共线的坐标表示:设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1)$,$\mathbf{b}=(x_2,y_2)$,当且仅当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时,向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}(\mathbf{b}\neq\mathbf{0})$ 共线.虽然课本上要求 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$,但实际上我们可以证明,$\mathbf{b}=\mathbf{0}$ 时这个结论也是成立的.因此,这个结论可推广为:设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1)$,$\mathbf{b}=(x_2,y_2)$,,当且仅当 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 时,向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 共线.因此,解法二是正确的.

解法三中,由三点 A,B,C 共线,直接得到 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$ 是不正确的,这样做,实际上默认了 B,C 不重合,因此还要讨论 B,C 重合的情形,当 B,C 重合时,$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,$n\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2=5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$,因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是单位正交基底,所以 $n=5,m=10$.因此,解法三的答案是错误的,解题过程与解法一有相同的漏洞.

解法三的解题过程可以完善如下:当 B,C 重合时,$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,$n\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2=5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$,因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是单位正交基底,所以 $n=5,m=10$.

当 B,C 不重合时,由三点 A,B,C 共线,直接得到 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$,将 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 代入,得 $(m+1)\mathbf{e}_2=(nx-5x+3)\mathbf{e}_1$.因为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是正交单位向量,所以 $m+1=0$,所以 $m=-1,n=-\frac{1}{2}$.

综上,$m=-1,n=-\frac{1}{2}$ 或 $m=10,n=5$.

在向量中不能忽略零向量的影响,共线向量定理:向量 $\mathbf{a}(\mathbf{a}\neq\mathbf{0})$ 与 $\mathbf{b}$ 共线,当且仅当有唯一一个实

数 λ,使 $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$. 这里要保证向量 $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$,否则结论不成立. 若三点 P,Q,R 共线,且 Q,R 两点不重合,则 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OQ}+(1-x)\overrightarrow{OR}$. 这里要保证 Q,R 两点不重合,否则结论不成立.

教学中,我们不能忽略定义、定理、性质的条件,要对条件进行梳理,讲清条件是否可以减少或变化,结论是否可以改进,这样学生才能真正理解并掌握相关知识,也才有可能做到灵活运用.

周天明(安徽省合肥市第六中学 230001)

选登 3

我们将解法一中多出的解 $m=10,n=5$ 代回题目,可以发现$\overrightarrow{OB}=5\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2=\overrightarrow{OC}$,也就是说此时 B、C 两点是重合的. 而此时并不存在 $x\in\mathbf{R}$,使得$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$,这是因为,在$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$的前提下,若$\exists x\in\mathbf{R}$,使得$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$,则$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$,这样我们会得到 A、B 两点也重合,这明显与题目条件不符. 于是,由解法三是无法得到 $m=10,n=5$ 这组解的.

这样就有一个问题了:解法一和解法三明明是同样的解法,使用的都是解三点共线问题的常用解法,为什么得到的解不一样呢?这就需要我们重新审视一下这个解法依赖的定理(三点共线定理):A、B、C 三点共线$\Leftrightarrow\exists x\in\mathbf{R}$,使得$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$.

由第一段的分析可知:在本题的这个例子里,当$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$时,由 A、B、C 三点共线是无法得到$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$,但是可以得到$\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OC}$和$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OB}$等. 而我们在使用这个定理的时候,都认为$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$三者出现在式子$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$中的顺序是任意的. 现在出现两个式子成立,一个不成立,这就给这个定理的使用带来了困难. 为什么会出现这样的问题?这和我们对该定理细节的把握存在缺失有关. 该定理严格的表述是:

互不相同的三点 A、B、C 共线$\Leftrightarrow\exists$不等于 0 和 1 的实数 x,使得$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+(1-x)\overrightarrow{OC}$(点 O 是与 A、B、C 三点不同的任意一点,该式子也可以写成$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OC}+(1-x)\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OC}$和$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OB}$等,共六个. 当然,对于不同的式子,$x$ 值是不同的).

也就是说,由三点共线可以推出六个式子;而要得到三点共线,只需要一个式子成立即可. 定理的证明是简单的,这里从略.

于是,对于这题,我们既可以改题目,也可以改解法.

先说改题目. 只要在原题目中加上条件"若 A、B、C 三点互不相同"即可. 于是解法一中的 x 就不能为 0,这就排除掉了 $m=10,n=5$ 这组平凡解. 解法一和解法三的结果就相同了.

再说改解法. 如果允许 A、B、C 三点中可以有两点重合,那么我们就要分类讨论了. 这时,解法一和解法三都不完善,都要做修正.(具体见选登 2,此处略.)

对于这道题,笔者认为还是改题目比较好. 因为这道题的条件比较特殊,会出现两点重合的情况,而通常的三点共线问题中都默认这三点是互不相同的三点,同时绝大部分的题目中并不会出现两点重合这种退化的情况;另外,在这样的题目当中去考察分类讨论思想也并不是很好,这会给学生的学习带来额外的负担. 但是我们在三点共线定理的教学中,还是应该更细致一些,也就是将定理的表述改为上述较为严格的形式.

邓超(福建省福州市第十八中学象园校区,350005)