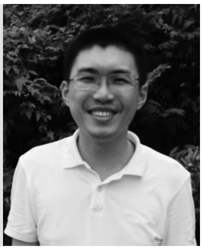
· 数学竞赛 ·

一道希望杯题的三种解法（初二）

邓超（福建省福州市第十八中学象园校区　350005）

邓超　中学数学二级教师，获理学学士学位。主要从事中学数学解题方面的研究，研究领域侧重于代数、组合学和概率论；同时也研究游戏中的数学以及如何将初等数学应用于生活实践。



例　若有理数 a,b,c 两两不等，则 $\frac{a-b}{b-c}$，$\frac{b-c}{c-a}$，$\frac{c-a}{a-b}$ 中负数的个数是（　　）

(A)3 个.　　(B)2 个.

(C)1 个.　　(D)0 个.

解法 1　特殊值法

取 $a=0,b=1,c=-1$，则

$$\frac{a-b}{b-c}=-\frac{1}{2},\frac{b-c}{c-a}=-2,\frac{c-a}{a-b}=1,$$

其中含有两个负数，故选(B).

注　特殊值法是解客观题特别是选择题的常用、有效的方法. 利用此法常常可以快速的解决某些选择题，因此在考试期间经常使用. 但是，使用此法只能做到知其然而不知其所以然. 平时练习时不应满足于选对，需要另寻它法.

解法 2　我们考虑三个式子的积：

$$\frac{a-b}{b-c}\cdot\frac{b-c}{c-a}\cdot\frac{c-a}{a-b}=1,$$

由积是一个正数.

可知这三个式子中的负数一定是偶数个，要么是 0 个，要么是 2 个.

令 $x=a-b,y=b-c,z=c-a$，则有 $x+y+z=0$ 且 x,y,z 都不为 0.

同时，原来的三个式子变为 $\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}$.

因为　　$x+y+z=0$,

且 x,y,z 都不为 0,

所以 x,y,z 中必有一个是正数，一个是负数，这两个数的商必然在 $\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}$ 中出现，且商为负数，于是这三个数中至少有一个负数.

所以有两个负数.

解法 3　我们观察到这三个式子具有轮换对称性，因此不妨设：$a>b>c$，则

$$\frac{a-b}{b-c}>0,\frac{b-c}{c-a}<0,\frac{c-a}{a-b}<0,$$

有两个负数，选(B).

注　这里有一个概念：轮换对称性. 这是和代数式相关的概念，我们以三元的代数式为例说明这一概念. 对于代数式 $f(a,b,c)$，对三个字母做任意的轮换（就是把 a 换成 b，b 换成 c，c 换成 a；或者 a 把换成 c，c 换成 b，b 换成 a）后，所得到的新的代数式（变为 $f(b,c,a)$ 或 $f(c,a,b)$）都与原来的代数式相同，就称该代数式具有轮换对称性. 比如，$a^2b+b^2c+c^2a$ 就具有轮换对称性. 而对此题的三个式子，做一次字母轮换，得到的三个式子与原来的相同（当然顺序不同），因此说它们具有轮换对称性. 但是解法 3 不正确，至少不完全正确. 解法 3 证明了当 $a>b>c$ 时，三式中必有两个负数，由轮换对称性，我们可以得到：当 $b>c>a$ 和 $c>a>b$ 时，其中也有两个负数. 比如，若三个有理数满足 $b>c>a$，那么我们把 b 换成 a，a 换成 c，c 换成 b，于是有 $a>b>c$，而这已经讨论过了. 但是，对于 $b>a>c$，$a>c>b$ 和 $c>b>a$ 这三种情况就要另外讨论了，由轮换对称性，只要考虑其中一种即可. 于是我们对解法三进行修正，有

解法 3(更正)　首先，我们观察到这三个式子具有轮换对称性.

(1) 当 $a>b>c$ 时，

$$\frac{a-b}{b-c}>0,\frac{b-c}{c-a}<0,\frac{c-a}{a-b}<0,$$

有两个负数.

（下转 28 页）

一道考题的两种解法（初三）

张琴娣（江苏省扬中市西来桥学校　212221）

张琴娣　研究生学历，中学一级教师。自工作以来一直致力于中学数学教学的研究，大胆尝试教学改革，教学成绩优异，有多篇文章在报刊杂志上发表。

题目　如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=a(a>5)$．点 P 在以 A 为圆心、AB 长为半径的 $\odot A$ 上，且在矩形 $ABCD$ 的内部，P 到 AD，CD 的距离 PE，PF 相等．

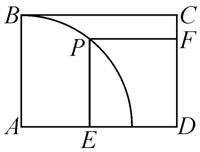


图 1

(1) 若 $a=7$，求 AE 长；

(2) 探索：a 的取值与点 P 个数之间的关系？

解法 1　(1) 连接 AP．

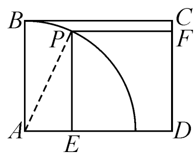


图 2

设 $AE=x$，则

$$ED=7-x.$$

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，

所以　$\angle D=90^\circ$．

又因为点 P 到 AD，CD 的距离 PE，PF 相等，

所以　四边形 $PEDF$ 是正方形．

则　$PE=ED=7-x$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中，由勾股定理，得

$$AE^2+PE^2=PA^2,$$

即　$(7-x)^2+x^2=5^2$，

解得　$x=3$ 或 4．

所以 AE 的长为 3 或 4．

(2) 同(1)，可知，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中，

$$PE=ED=a-x,$$

由勾股定理，得

$$AE^2+PE^2=PA^2,$$

即　$(a-x)^2+x^2=25$，

化简得　$2x^2-2ax+a^2-25=0$，

$$\Delta=4a^2-4\times2(a^2-25)$$
$$=-4a^2+200,$$

所以当 $5<a<5\sqrt{2}$ 时，存在两个点 P 满足条件；

当 $a=5\sqrt{2}$ 时，存在唯一的点 P 满足条件；

当 $a>5\sqrt{2}$ 时，不存在点 P 满足条件．

解法 2　(1) 同解法 1．

(2) 连接 PD．

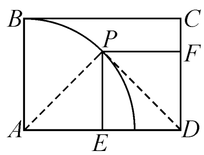


图 3

因为点 P 到 AD，CD 的距离 PE，PF 相等，所以点 P 在 $\angle FDE$ 的角平分线上．

若直线 PD 与 $\odot A$ 相切，则在 $\mathrm{Rt}\triangle APD$ 中，

$$AP=PD=5,$$

由勾股定理，得

$$AD=\sqrt{AP^2+PD^2}=5\sqrt{2},$$

所以当 $5<a<5\sqrt{2}$ 时，直线 PD 与 $\odot A$ 相交，存在两个点 P 满足条件；

当 $a=5\sqrt{2}$ 时，直线 PD 与 $\odot A$ 相切，存在唯一的点 P 满足条件；

当 $a>5\sqrt{2}$ 时，直线 PD 与 $\odot A$ 相离，不存在点 P 满足条件．

(上接 29 页)

由三个式子的轮换对称性，可以得到当 $b>c>a$ 和 $c>a>b$ 时，也有两个负数．

(2) 当 $b>a>c$ 时，

$$\frac{a-b}{b-c}<0,\frac{b-c}{c-a}<0,\frac{c-a}{a-b}>0,$$

由轮换对称性，可以得到当 $a>c>b$ 和 $c>b>a$ 时，也有两个负数．

综上所述，全部的 6 种情况都已讨论，都只有两个负数．

故选(B)．