恒成立,数列$\{a_n\}$是“M类数列”。

同理来看递推关系 $a_1=2$, $a_n+a_{n+1}=2\cdot 3^n$ ($n\in \mathbf{N}^*$).

设 $a_n+\lambda\cdot 3^{n+1}=-(a_n+\lambda\cdot 3^n)$,

$\therefore a_{n+1}=-a_n-4\lambda\cdot 3^n$, $\therefore -4\lambda=2$,

$\therefore \lambda=-\frac{1}{2}$,

$\therefore a_{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{n+1}=-(a_n-\frac{1}{2}\cdot 3^n)$.

又 $a_1-\frac{1}{2}\times 3=\frac{1}{2}$, $\therefore$数列$\{a_n-\frac{1}{2}\times 3^n\}$是首项为$\frac{1}{2}$,公比为 -1 的等比数列,

$\therefore a_n-\frac{1}{2}\times 3^n=\frac{1}{2}\times(-1)^{n-1}$,

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\times(-1)^{n-1}$,

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\times 3^{n+1}+\frac{1}{2}\times(-1)^n$.

若 $a_{n+1}=pa_n+q=\frac{p}{2}\times 3^n+\frac{p}{2}\times(-1)^{n-1}+q$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,

则$\begin{cases}\frac{p}{2}=\frac{3}{2},\\ \frac{p}{2}\times(-1)^{n-1}+q=\frac{1}{2}\times(-1)^n,\end{cases}$

$\therefore p=3$, $q=2\times(-1)^n$.

因此 q 不是一个固定的常数,所以数列$\{a_n\}$不是“M类数列”.

(收稿日期:2010 - 09 - 01)

排列组合题妙解一例

邓 超

(福建省福州市第十八中学, 350001)

题目 设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$,选择 I 的两个非空子集 A、B,要使集合 A 的最大元素小于集合 B 的最小元素,则不同的选择方法有多少种?

解 $\because$集合 A 的最大元素小于集合 B 的最小元素, $\therefore A\cap B=\varnothing$.

又集合 A、B 是集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$ 的非空子集, $\therefore A\cup B\subset\{1,2,3,4,5\}$.

$\therefore 2\leq \mathrm{card}(A\cup B)\leq 5$. ($\mathrm{card}(A\cup B)$ 表示集合 $A\cup B$ 中元素的个数).

现在对 $\mathrm{card}(A\cup B)$ 进行分类讨论.

(1) 当 $\mathrm{card}(A\cup B)=2$ 时, $A\cup B$ 共有 C_5^2 种选择,每种选择对应 1 种集合 A、B 的选择方法,故此时集合 A、B 共有 C_5^2 种选择方法. (因为若 $A\cup B=\{a,b\}$,其中 $a<b$,则只有 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$ 这一种情况.)

(2) 当 $\mathrm{card}(A\cup B)=3$ 时, $A\cup B$ 共有 C_5^3 种选择,每种选择对应 2 种集合 A、B 的选择方法,故此时集合 A、B 共有 $2C_5^3$ 种选择方法. (因为若 $A\cup B=\{a,b,c\}$,其中 $a<b<c$,则只有 $A=\{a,b\}$, $B=\{c\}$ 和 $A=\{a\}$, $B=\{b,c\}$ 这两种情况,余下两种情况理由类似,不再叙述).

(3) 当 $\mathrm{card}(A\cup B)=4$ 时, $A\cup B$ 共有 C_5^4 种选择,每种选择对应 3 种集合 A、B 的选择方法,故此时集合 A、B 共有 $3C_5^4$ 种选择方法.

(4) 当 $\mathrm{card}(A\cup B)=5$ 时, $A\cup B$ 共有 C_5^5 种选择,每种选择对应 4 种集合 A、B 的选择方法,故此时集合 A、B 共有 $4C_5^5$ 种选择方法.

综上所述,由分类加法原理得:不同的选择方法有 $C_5^2+2C_5^3+3C_5^4+4C_5^5=49$ 种.

注 此题的常规做法是对 $\mathrm{card}(A)$ 进行分类讨论,这样做十分繁琐且极易出错;上述解法对 $\mathrm{card}(A\cup B)$ 进行分类讨论,从而使问题得到巧妙解决.

(收稿日期:2010 - 10 - 28)