争　鸣

问题 243　学生的解法对吗?

为便于读者阅读,将原问题摘录如下.

题目　已知椭圆 E 的中心在坐标原点 O,焦点在 x 轴上,其离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,过点 $C(-1,0)$的直线 l 与椭圆E 相交于A,B 两点,且满足$\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{BC}$.求当$\triangle AOB$ 的面积达到最大时直线 l 和椭圆 E 的方程.

教师的解答:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=my-1$(斜率为 0 时不满足条件,舍去).

由$\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{BC}$得 $x_1+1=-2-2x_2$,$y_1=-2y_2$.

$\because e=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore a=\sqrt{3}c$,$b=\sqrt{2}c$,故可设椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{3c^2}+\frac{y^2}{2c^2}=1$.

联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{3c^2}+\frac{y^2}{2c^2}=1,\end{cases}$ 消去 x 得

$$(2m^2+3)y^2-4my+2-6c^2=0 \quad ①$$

由韦达定理知:$y_1+y_2=\frac{4m}{2m^2+3}$,

$\therefore$ $y_1=\frac{8m}{2m^2+3}$,$y_2=\frac{-4m}{2m^2+3}$.

显然 $m\neq0$,所以

$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}|y_1|+\frac{1}{2}|y_2|$$

$$=\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{6|m|}{2m^2+3}=\frac{6}{2|m|+\frac{3}{|m|}}$$

$$\leqslant\frac{6}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

当且仅当 $m^2=\frac{3}{2}$即 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$时取等号.

又$\because y_1\cdot y_2=\frac{2-6c^2}{2m^2+3}=\frac{8m}{2m^2+3}\cdot(\frac{-4m}{2m^2+3})=-\frac{4}{3}$,解得 $c^2=\frac{5}{3}$.

经检验:当 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$且 $c^2=\frac{5}{3}$时满足方程①的$\Delta>0$.

综上:椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{10}{3}}=1$,直线 l 的方程为 $2x\pm\sqrt{6}y+2=0$.

学生的解答:$\because e=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore a=\sqrt{3}c$,$b=\sqrt{2}c$,故可设椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{3c^2}+\frac{y^2}{2c^2}=1$.

由直线过点 $C(-1,0)$,可设直线 l 的方程为 $x=my-1$.

设 $A(x_1,y_1)(y_1>0)$,则$\overrightarrow{CA}=(x_1+1,y_1)$,$\overrightarrow{BC}=(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1}{2})$,$\therefore B(-1-\frac{x_1+1}{2},-\frac{y_1}{2})$.

此时点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,$|AB|=\frac{3y_1\sqrt{1+m^2}}{2}$,故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=\frac{3}{4}y_1$,即 y_1 取最大时 $S_{\triangle AOB}$的面积取最大.

而 y_1 的最大值为$\sqrt{2}c$,此时 $A(0,\sqrt{2}c)$,$B(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}c)$,将点 B 的坐标代入椭圆 E 的方程得:$\frac{(-\frac{3}{2})^2}{3c^2}+\frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2}c)^2}{2c^2}=1$,解得 $c^2=1$,进而得到 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$,直线 l 的方程为 $2x-\sqrt{2}y+2=0$.

学生的解法对吗?教师又该如何去分析?对我们的解题又有什么启示?希望同行给予指正.

本问题共收到评析稿件 16 篇,均认为学生的解法是错误的.来稿前三名的作者是:林运来　陈永民(福建省漳州开发区南滨大道 318 号厦门大学附属

实验中学),尚生陈(陕西省延安育英中学),夏炳文(安徽省阜阳市第三中学).

选登 1

学生的解答从开始至“$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=\frac{3}{4}y_1$”都是正确的,错误在于后继解答中“含糊”地利用“$y_1$ 的最大值为$\sqrt{2}c$”进一步求解 c 和 m.

事实上,在所设椭圆$\frac{x^2}{3c^2}+\frac{y^2}{2c^2}=1(c>0)$中,$y$ 取最大值$\sqrt{2}c$ 是正确的,但是这里 c 是一个变量,要随椭圆 E 不同而变,且$\triangle AOB$ 的面积为$\frac{3}{4}y_1=f(c)$(即为一个关于 c 的函数). 因为椭圆 E 的离心率是常数,对于每一个椭圆 E,即 c 的值取定以后,直线 l 也就随之确定,此时$f(c)$也就是一个确定的值. 问题的实质就是:求满足题设条件的 c 变化时函数 $f(c)$ 的最大值. 因此,不能简单把 y_1 的最大值“当成”$\sqrt{2}c$ 代入椭圆方程求解得出的结果当成最终结论. 学生错误的本质在于把关系式 $S_{\triangle AOB}=\frac{3}{4}y_1$ 与另一个关系式$\frac{x_1^2}{3c^2}+\frac{y_1^2}{2c^2}=1$ 之间的逻辑关系等同于函数的定义域与值域之间的对应关系,产生了混淆.

下面从图形的角度对问题进一步辨析.

(1)利用“y_1 的最大值是$\sqrt{2}c$”进行求解,相当于“默认”当点 A 为椭圆的短轴上端点时$\triangle AOB$ 的面积达到最大值,此时满足题目条件的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点就是椭圆短轴的上端点 A,如图 1. 由学生的解答方法易知此时 $c=1$.

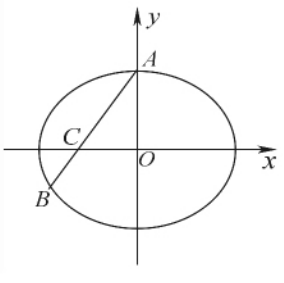

图 1

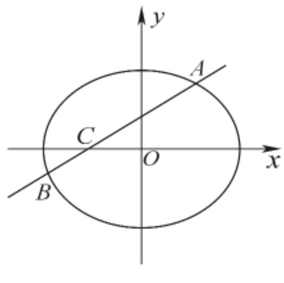

图 2

(2)当 $c\neq1$ 时,满足条件的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点A 不是椭圆的短轴上端点,如图 2(其中直线 AB 随 c 的取值而变化),此时$\triangle AOB$ 的面积可能存在比(1)中得出的面积要大的情形,但这个值并不是在“$y_1=\sqrt{2}c$”时取到(因为 y_1 根本取不到$\sqrt{2}c$),因此这种情形下利用“y_1 的最大值是$\sqrt{2}c$”进行求解就不正确了.

如上所说,“y_1 的最大值为$\sqrt{2}c$”本身就存在“无效推理”,是一个“含糊”的前提,含糊的前提就算经过正确的推理,得出的结论也是错误的.

林运来　陈永民(福建省漳州开发区南滨大道 318 号厦门大学附属实验中学　363105)

选登 2

学生的解法是错误的,并且解法中出现的几处错误还非常典型,以下是笔者的思考.

1. 设点 A 的坐标时可以加限制条件 $y_1>0$ 吗?

在学生的解法中,设 A 的坐标(x_1,y_1)时加了一个限制条件 $y_1>0$,因为 A,B,O 三点可以构成三角形,所以 $y_1\neq0$,先姑且认为学生的整个解法是正确的,那么 $y_1<0$ 和 $y_1>0$ 这两种情况下答案是一样的吗?若 $y_1<0$,则 $S_{\triangle AOB}=-\frac{3}{4}y_1$,那么 y_1 取最小时 $S_{\triangle AOB}$取最大值,y_1 的最小值为$-\sqrt{2}c$,此时可以得到 $c=1,m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,显然,$m$ 的取值与 $y_1>0$ 时的不一样. 导致这种错误的根本原因是学生作图的随意性,认为点 A 在 x 轴上方和下方情况是一样的.

2. $\sqrt{2}c$ 可以作为 y_1 的最大值吗?

其实,教师和学生的解法本质是一样的,都是通过构造函数求其最大值,并且所得到的$\triangle AOB$ 的面积表达式也是一样的,教师解法中得到面积为 $S=\frac{6|m|}{2m^2+3}$,且 $y_1=\frac{8m}{2m^2+3}$,则 $S=\frac{3}{4}|y_1|$,如果学生在设点 A 坐标时不加限制条件 $y_1>0$,也是得到 $S=\frac{3}{4}|y_1|$,只不过得到$\triangle AOB$ 的面积的渠道不一样,而学生错误的本质原因是对函数最值的概念没有理解清楚.

不妨先看看最值的定义,在人教 A 版教材中,“函数的最大值”的定义为:

一般地,设函数 $y=f(x)$的定义域为 I,如果存在实数 m 满足:(1)对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant m$;(2)存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=m$. 那么,我们称 m 是函数 $y=f(x)$的最大值.

由定义可知,m 应该是与自变量 x 无关的一个常数,那么学生解法中的 $\sqrt{2}c$ 是常数吗?在教师的解法中,可知 $\frac{2-6c^2}{2m^2+3}=\frac{8m}{2m^2+3}\cdot(\frac{-4m}{2m^2+3})$,如果 c 为常数,那么 m 也就是常数,于是三角形 AOB 的面积就是定值了,这就说明 c 是一个变量,所以 $\sqrt{2}c$ 不可以作为 y_1 的最大值.

夏炳文(安徽省阜阳市第三中学 236000)

选登 3

仔细审视该学生的解法(下文称原解法),可以认为他正确地得到了 $S_{\triangle AOB}=\frac{3}{4}y_1$,从而得到 y_1 取最大值时,$S_{\triangle AOB}$ 取最大值(事实上不应该假设 $y_1>0$,除此之外,到这步没有错误),但之后的做法就完全错了. 为了便于分析该解法后面的错误,我们先沿着该解法的思路完成本题.

首先,我们要去掉 $y_1>0$ 这个假设,于是可以得到 $S_{\triangle AOB}=\frac{3}{4}|y_1|$. 为了得到这个结论,只使用了 $\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{BC}$ 这个条件,没有使用 A,B 两点在椭圆 E 上这个条件,原解法的错误正是出现在对这个条件的使用上.

接下来要求出 $|y_1|$ 的最大值,我们先把 y_1 的约束条件找出来.

由原解法可知:$A(x_1,y_1)$,$B(-1-\frac{x_1+1}{2},-\frac{y_1}{2})$,这两个点在椭圆 E 上,所以可得

$$\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{2}=c^2 \quad ②$$

$$\frac{(x_1+3)^2}{12}+\frac{y_1^2}{8}=c^2 \quad ③$$

为了在这两个方程的约束下求出 $|y_1|$ 的最大值,消去 c^2 得 $\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{2}=\frac{(x_1+3)^2}{12}+\frac{y_1^2}{8}$,化简整理得

$$\frac{2}{3}(x_1-1)^2+y_1^2=\frac{8}{3} \quad ④$$

不难看出,这是一个椭圆的方程. 也就是说题目中的 A 点的轨迹是椭圆的一部分(通过画图可知,A 点只能在直线 $x=-1$ 的右侧,因而不是整个椭圆),于是 $|y_1|$ 的最大值就容易求了,实际上我们应该求 y_1^2 的最大值.

由④式得 $y_1^2=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}(x_1-1)^2$,所以,当 $x_1=1$ 时,y_1^2 取最大值 $\frac{8}{3}$,此时 $y_1=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

将 $x_1=1$,$y_1=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入式②可得 $c^2=\frac{5}{3}$,所以此时椭圆方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{\frac{10}{3}}=1$.

再将它们代入直线方程 $x=my-1$ 得 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以此时直线 l 的方程为 $2x\pm\sqrt{6}y+2=0$.

接下来我们看看原解法后面的错误是怎么回事. 由于原解法中"假设 $y_1>0$"不是关键性的错误,且为了方便说明本质错误,我们姑且认为其中的假设"$y_1>0$"没有问题. 原解法得到 $S_{\triangle AOB}=\frac{3}{4}y_1$,于是要求 $S_{\triangle AOB}$ 的最大值,只需要求 y_1 的最大值. 到了这里,原解法马上说 y_1 的最大值是 $\sqrt{2}c$,而这是不对的,因为这个结论的产生实际上是默认了 y_1 只满足式②这个约束条件(A 点在椭圆 E 上),但是 y_1 还应该满足式③这个约束条件(B 点也在椭圆 E 上). 于是原解法得到了错误的结论:当 y_1 取最大值时,A 点位于 y 轴上(因为原解法得到 A 点的坐标为 $(0,\sqrt{2}c)$). 而实际上经过 A,B 两点(A,B 满足条件 $\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{BC}$)且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的椭圆有无数个,绝大多数情况中,A 点都不在 y 轴上,于是 y_1 取最大值时,A 点不太可能恰好位于 y 轴上. 到了这里,"B 点位于椭圆 E 上"这个条件还未使用过,于是将 B 点坐标 $(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}c)$ 代入椭圆 E 的方程,完成了此题,得到了错误的答案. 我们用一句话总结:原解法出现错误的原因是没有正确的使用"B 点在椭圆 E 上"的这个条件,在应该使用该条件的时候忽略了该条件.

这个例子告诉我们:解题时并不是使用了题目给定的所有条件就能得到正确的答案,有时,条件使用的顺序恰当与否也将关系到我们能否正确地做出解答.

邓超(福建省福州市第十八中学象园校区 350005)