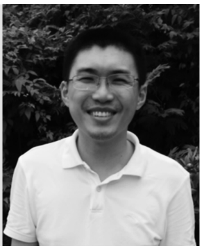
一道质数问题的分析与解（初二）

邓超（福建省福州第十八中学象园校区　350005）

邓超　毕业于闽江学院数学系，理学学士。主要从事中学数学解题方面的研究，研究领域侧重于代数、组合学和概率论；同时也研究如何将初等数学应用于生活实践。



题目　已知 a,b 为质数，且满足 $a^3-b^5=(a+b)^2$，那么代数式 a^3-b^3+2 的值为（　　）

(A) 316.　　(B) 317.

(C) 318.　　(D) 319.

分析　对于这类和质数有关的题目，一般来说，这类题目肯定只能要把所有的质数都求出来，也就是不可能用整体代换的思想求解（否则质数的条件就用不上了）。这类题目中的质数一定不会太大，无非就是取 $2,3,5,7$，这些比较小的质数试一试，然后再利用取特殊质数的模得到严格的证明.

此题中因为 $a^3-b^5=(a+b)^2>0$，显然有 $a>b$，即 $a\geqslant b+1$. 于是可对取 $2,3,5,7$ 试一试，看看是否能求出 a，但是这样会得到一个一元三次方程，很难处理. 于是，我们转换思路，试试可否用整除的性质求解.

由 $a^3-b^5=(a+b)^2$，得

$$a^2(a-1)=b(b^4+b+2a),$$

所以 $$b\mid a^2(a-1),$$

因为 $a\neq b$ 且 a,b 都是质数，

所以 a、b 互质，

所以 $b\mid(a-1)$，可设 $a-1=bk$（k 是大于 0 的自然数），

即 $$a=bk+1(k\geqslant 1).$$

同理又由 $a^3-b^5=(a+b)^2$，得

$$a(a^2-a-2b)=b^2(b^3+1),$$

所以 $$a\mid b^2(b^3+1).$$

因为 a,b 互质，所以 $a\mid(b^3+1)$，

即 $$a\mid(b+1)(b^2-b+1),$$

因为 a 为质数，

所以 $a\mid b+1$ 或 $a\mid b^2-b+1$.

若 $a\mid b+1$，则 $a\leqslant b+1$，

又有 $$a\geqslant b+1,$$

所以 $$a=b+1,$$

因为 a,b 为质数，所以此时 $a=3,b=2$，显然这不是方程的解.

所以有 $$a\mid b^2-b+1.$$

因为 $$a=bk+1(k\geqslant 1),$$

所以 $\dfrac{b^2-b+1}{bk+1}$ 是整数.

所以 $\dfrac{b^2-b+1}{bk+1}-1$ 也是整数.

$\dfrac{b^2-b+1}{bk+1}-1=\dfrac{b^2-b-bk}{bk+1}=\dfrac{b(b-1-k)}{bk+1}$ 是整数.

因为 $$(bk+1,b)=1,$$

所以 $$bk+1\mid b-1-k.$$

因为 $k\geqslant 1$，显然有 $b-1-k<bk+1$，

所以此时必有 $b-1-k=0$，

即 $$b=1+k,$$

所以 $a=bk+1=(k+1)k+1=k^2+k+1$.

将其代入原方程可得

$$(k^2+k+1)^3-(k+1)^5=(k^2+2k+2)^2.$$

至此，只要解出方程，就能求出此题，该问题就没有本质上的困难. 但是，对于一个一元六次方程，又是笔算，我们不可能有好的方法处理. 当然，我们可以让 k 取 $1,2,4,6$ 试一试（此时 b 为 $2,3,5,7$）. 可以求得 $a=7,b=3$. 但是，此做法不严格，不能确定是否还有更大的解. 由于此题是选择题，我们可以专门针对它，提出另外的思路.

由四个选项可知

$$315<a^3-b^3+2<320.$$

$$\begin{aligned}a^3-b^3+2&=(a-b)(a^2+ab+b^2)+2\\&=k^6+3k^5+6k^4+6k^3+3k^2+2,\end{aligned}$$

（下转36页）

去分母并整理,得

$$xyz=108-3(xy+yz+xz).$$

因为 $\quad xy+yz+xz=28,$

所以 $\quad xyz=108-3(xy+yz+xz)$

$$=108-3\times 28$$

$$=24,$$

即 xyz 的值为 24.

例3　如图4,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=425$,$BC=450$,$CA=510$,点 P 是 $\triangle ABC$ 内的任意一点,线段 DE,FG,和 HT 的长均为 d,且交于点 P,B 并分别平行边 AB,BC 和 CA,求 d 的值.

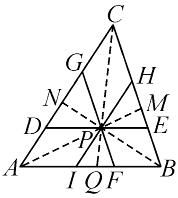


图4

解　连接 AP,BP,CP 并分别延长交边 BC,CA,AB 于点 M,N,Q.

因为 $\quad DE\,/\!/\,AB,$

所以 $$\frac{CP}{CQ}=\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}=\frac{d}{425},$$

所以 $$\frac{PQ}{CQ}=1-\frac{d}{425}.$$

同理可 $\dfrac{PM}{AM}=1-\dfrac{d}{450}$,$\dfrac{PN}{BN}=1-\dfrac{d}{510}$.

根据以上的性质,可得

$$\frac{PQ}{CQ}+\frac{PM}{AN}+\frac{PN}{BN}=1,$$

即 $$\left(1-\frac{d}{425}\right)+\left(1-\frac{d}{450}\right)+\left(1-\frac{d}{510}\right)=1,$$

则 $$d\left(\frac{1}{425}+\frac{1}{450}+\frac{1}{510}\right)=2,$$

解得 $$d=306,$$

所以 d 的值为 306.

练习

1.如图5,点 P 是 $\triangle ABC$ 内有任意一点,AP,BP,CP 分别交 BC,AC,AB 于点 D,E,F,已知 $\dfrac{AP}{PD}+\dfrac{BP}{PE}+\dfrac{CP}{PF}=92$,求 $\dfrac{AP}{PD}\times\dfrac{BP}{PE}\times\dfrac{CP}{PF}$ 的值.

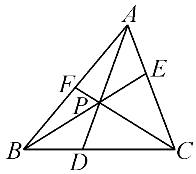


图5

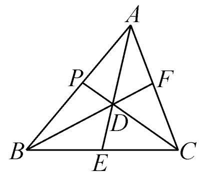


图6

2.如图6,在 $\triangle ABC$ 中,点 E,F,P 分别在边 BC,CA,AB 上,已知 AE,BF,CP 交于点 D,且 $\dfrac{AD}{DE}+\dfrac{BD}{DF}+\dfrac{CD}{DP}=1994$,求 $\dfrac{AD}{DE}\times\dfrac{BD}{DF}\times\dfrac{CD}{DP}$ 的值.

答案

1.94.　　2.1996.

(上接34页)

所以 $\quad 320>a^3-b^3+2>k^6,$

因为 k 是整数,所以易得 $k\leqslant 2$,

所以 $\quad 1\leqslant k\leqslant 2.$

经检验:$k=2$. 此时 $a=7$、$b=3$。

于是 $a^3-b^3+2=7^3-3^3+2=318$.

选(C).

知道了答案,我们不难给出进一步补充,严格的证明原方程只有这一组质数解. 对3取模. 分四种情况讨论:

(1)若 $a\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,$b\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,则左边 $\equiv 1-1\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,右边 $\equiv(1+1)^2\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,左边 $\not\equiv$ 右边,矛盾.

(2)若 $a\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,$b\equiv 3(\mathrm{mod}3)$,则左边 $\equiv 1-32\equiv 2(\mathrm{mod}3)$,右边 $\equiv(1+2)^2\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,左边 $\not\equiv$ 右边,矛盾.

(3)若 $a\equiv 2(\mathrm{mod}3)$,$b\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,则左边 $\equiv 8-1\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,右边 $\equiv(2+1)^2\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,左边 $\not\equiv$ 右边,矛盾.

(4)若 $a\equiv 2(\mathrm{mod}3)$,$b\equiv 2(\mathrm{mod}3)$,则左边 $\equiv 8-32\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,右边 $\equiv(2+2)^2\equiv 1(\mathrm{mod}3)$,左边 $\not\equiv$ 右边,矛盾.

综上所述,只能有 $b\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ 或 $a\equiv 0(\mathrm{mod}3)$ 若 $b\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,因为 b 为质数,所以 $b=3$,于是由上段的分析知:$a=7$. 同样的讨论易知不可能有 $a\equiv 0(\mathrm{mod}3)$. 综上所述,原方程只有一组质数解 $a=7$,$b=3$.