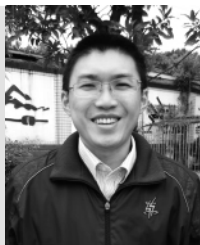


# 奇函数的一个性质及应用

邓超 (福建省福州市第十八中学象园校区 350005)

邓超 毕业于闽江学院数学系,获理学学士学位,同年8月进入福建省福州市第十八中学.平时喜欢读书、学习,数学建模、计算机编程等.主要从事中学数学解题方面的研究,研究领域侧重于代数、组合学和概率论.



众所周知,奇函数  $f(x)$  满足

$$f(-x) = -f(x),$$

代入  $x=0$ , 得

$$f(-0) = -f(0),$$

即有  $f(0) = 0$ .

于是,得到奇函数的一个性质:

**性质** 若奇函数  $f(x)$  在  $x=0$  处有定义,则必有  $f(0) = 0$ .

**例1** 若函数  $f(x) = k \cdot 2^x + 2^{-x}$  为奇函数,则  $k =$  \_\_\_\_\_.

**解** 显然函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$  且为奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = k \cdot 2^0 + 2^{-0} = k + 1 = 0,$$

$$\text{故 } k = -1.$$

**例2** 设函数  $f(x) = \frac{-2^x + a}{2^{x+1} + b}$  ( $a > 0, b > 0$ ), 若  $f(x)$  是奇函数,求  $a$  与  $b$  的值.

**解** 因为分母  $2^{x+1} + b > 0$ ,

所以 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ .

又因为  $f(x)$  为奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = \frac{-2^0 + a}{2^{0+1} + b} = 0,$$

$$\text{解得 } a = 1.$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{-2^x + 1}{2^{x+1} + b}.$$

又 函数  $f(x)$  是奇函数,

所以  $\forall x \in \mathbf{R}$  有

$$f(-x) = -f(x).$$

把  $x=1$  代入上式得

$$f(-1) = -f(1),$$

$$\text{即 } \frac{-2^{-1} + 1}{2^{-1+1} + b} = -\frac{-2^1 + 1}{2^{1+1} + b},$$

$$\text{解得 } b = 2.$$

**注** 此题也可利用  $f(-x) = -f(x)$ , 得

$$\frac{-2^{-x} + a}{2^{-x+1} + b} = -\frac{-2^x + a}{2^{x+1} + b},$$

然后化简整理,得

$$(2a - b) \cdot 2^{2x} + (2ab - 4) \cdot 2^x + (2a - b) = 0,$$

由于这是关于  $x$  的恒等式,所以

$$\begin{cases} 2a - b = 0, \\ 2ab - 4 = 0, \end{cases} \text{最后求出 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 2. \end{cases}$$

但是这种做法计算量大,结果不易求得.

**例3** 若函数  $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - a}$  是奇函数,则

使  $f(x) > 3$  成立的  $x$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

**解** 因为函数  $f(x)$  是奇函数,若  $0$  属于函数  $f(x)$  的定义域,则

$$f(0) = 0, \text{即 } \frac{2^0 + 1}{2^0 - a} = 0,$$

去分母后,得  $2 = 0$ , 不成立.

所以  $x=0$  不属于函数  $f(x)$  的定义域,

因此  $x \neq 0$  是  $2^x - a \neq 0$  的解,

即  $x=0$  是  $2^x - a = 0$  的解,

$$\text{于是 } 2^0 - a = 0,$$

$$\text{所以 } a = 1.$$

$$\text{于是 } f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}.$$

$$\text{解不等式 } \frac{2^x + 1}{2^x - 1} > 3,$$

$$\text{得 } 1 < 2^x < 2,$$

$$\text{所以 } 0 < x < 1.$$