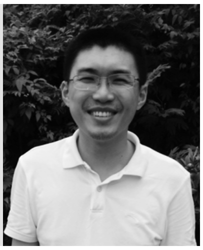
# 两个多项式乘法公式的应用（初二）

邓　超（福建省福州市第十八中学象园校区　350005）

邓超　主要从事中学数学解题方面的研究，研究领域侧重于代数、组合学和概率论，同时也研究如何将初等数学应用于生活实践。



在初中数学竞赛中，有两个常用的公式：

**公式 1**　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

**公式 2**　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

利用这两个公式可以解决许多代数问题，下面举例说明.

**例 1**　已知正实数 $a,b,c$ 满足方程组

$$\begin{cases}a+b^2+2ac=29,\\ b+c^2+2ab=18,\\ c+a^2+2bc=25,\end{cases}$$

求 $a+b+c$ 的值.

**分析**　该方程组中的每个方程形式上都是一样的，对于这种形式一致的等式(或不等式)，通常把它们连加起来，连加的时候应该把形式相同的一边加起来，另一边相应地也加起来.

**解**　把三式相加，得

$(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=72$，

由公式 1，得

$$(a+b+c)^2+(a+b+c)-72=0.$$

将 $a+b+c$ 看做一个整体，应用十字相乘分解因式，得

$$[(a+b+c)+9][a+b+c-8]=0.$$

因为 $a,b,c$ 都是正实数，

所以　$a+b+c+9>0$，

故　$a+b+c=8$.

**例 2**　实数 $a,b,c$ 满足不等式

$|a|\geqslant|b+c|$，$|b|\geqslant|a+c|$，$|c|\geqslant|a+b|$.

求证：$a+b+c=0$.

**分析**　三个不等式都含有绝对值符号，最好能够将绝对值符号去掉，将式子两边同时平方是去掉绝对值符号的常用技巧.

**解**　将三个不等式两边分别平方，得

$$a^2\geqslant b^2+2bc+c^2,$$
$$b^2\geqslant a^2+2ac+c^2,$$
$$c^2\geqslant a^2+2ab+b^2.$$

这三个不等式的形式一致，故将它们连加起来，得 $a^2+b^2+c^2\geqslant b^2+2bc+c^2+a^2+2ac+c^2+a^2+2ab+b^2$，

整理，得

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\leqslant 0,$$

由公式 1，得　$(a+b+c)^2\leqslant 0$，

又因为　$(a+b+c)^2\geqslant 0$，

所以　$(a+b+c)^2=0$，

故　$a+b+c=0$.

**例 3**　已知三个关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$ 恰有一个公共实数根，则 $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}$ 的值为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

**解**　将三个方程加起来，合并同类项，得

$(a+b+c)x^2+(a+b+c)x+(a+b+c)=0$，

$$(a+b+c)(x^2+x+1)=0,$$

因为 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

所以　$a+b+c=0$.

由公式 2，得

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$
$$=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}+3$$
$$=3.$$

故选(D).

**例4**　已知三个两两互质的正整数 $x,y,z$ 满足方程组 $\begin{cases}x^3+y^3+3xyz=z^3,\\x^2+7y^2=z^2,\end{cases}$ 则 $x^2+y^2+z^2$ 等于(　　)

(A)10.　(B)18.　(C)19.　(D)26.

**解**　把 $-(z)^3$ 看成 $(-z)^3$，由公式2，得

$$\begin{aligned}&x^3+y^3-z^3+3xyz\\=&(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)\\=&0,\end{aligned}$$

因为 $x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx$

$=x^2-2xy+y^2+z^2+xy+yz+zx$

$=(x-y)^2+z^2+xy+yz+zx>0$,

(因为 $x,y,z$ 都大于0)

所以 $\qquad x+y-z=0$,

即 $\qquad z=x+y.$　①

由 $x^2+7y^2=z^2$，得

$7y^2=z^2-x^2=(z-x)(z+x)$

$=y(2x+y)$,

所以 $\qquad 7y=2x+y$,　②

由①②，得 $\qquad x=3y,z=4y.$

因为 $x,y,z$ 两两互质，所以 $y=1$,

于是 $\qquad x=3,z=4.$

所以 $\qquad x^2+y^2+z^2=26$,

故选(D).

**例5**　分解因式：

$(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3.$

**解**　三个括号里的一次多项式形式上一致，不妨将它们加起来，得

$$b+c-2a+c+a-2b+a+b-2c=0,$$

再使用换元法：令 $x=b+c-2a$,

$y=c+a-2b$,

$z=a+b-2c$,

则有 $\qquad x+y+z=0$,

于是得到原式 $=x^3+y^3+z^3$,

由公式2，得

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-3xyz\\=&(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),\end{aligned}$$

于是原式 $=x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=3xyz$,

即 $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$

$=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c).$

(上接28页)

**坐标变换法**

平移、旋转、轴对称、中心对称等几何变换，都有其相对应的变换方法，平面直角坐标系中只要是能通过上述几何变换得到的点，利用相应的坐标变换就能求出其对应点坐标.

**解法3**　如图4，线段 $CA$ 可看成是由线段 $A'C$ 沿 $A'A$ 方向平移 $A'C$ 个单位长度得到的，即点 $A'$ 平移到了点 $C$，点 $C$ 平移到了点 $A$，它们的平移方式相同.

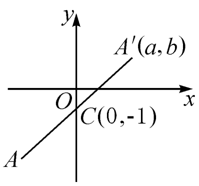



图4

因为点 $A'(a,b)$ 向左平移 $a$ 个单位长度，向下平移 $(b+1)$ 个单位长度可得到点 $C(0,-1)$.

所以点 $C(0,-1)$ 横坐标减去 $a$，纵坐标减去 $(b+1)$，即可得到点 $A$ 的坐标为 $(0-a,-1-(b+1))$，化简可得点 $A$ 坐标为 $(-a,-b-2)$.

故选(D).

**公式法**

坐标平面内有两个常用公式：中点坐标公式和两点间距离公式，利用已知点和所求点之间的关系列方程求解.

**解法4**　由中心对称知识可知，点 $C$ 为 $A'A$ 中点，设点 $A$ 坐标为 $(x,y)$，根据中点坐标公式，可得 $\begin{cases}x+a=0,\\y+b=-1\times 2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-a,\\y=-b-2,\end{cases}$

所以点 $A$ 坐标为 $(-a,-b-2)$.

故选(D).

同一个问题，从不同角度来分析，不但能积累解题经验，提高解题技能，还能沟通知识间的内在联系，形成知识网络. 点的坐标的四种求法，充分体现了笛卡尔直角坐标系的优势，通过多角度思考问题能促使思维触角伸向不同的方向，锻炼我们的思维，有利于培养思维的灵活性、多向性与创造性.