

与圆锥有关的一类计算题的解法

邓超 (福建省福州市第十八中学象园校区 350005)

邓超 福建省福州市人, 2006年6月毕业于闽江学院数学系, 获理学学士学位。同年8月进入福建省福州市第十八中学, 中学数学二级教师。



将圆锥的侧面沿着母线展开, 可以得到一个扇形. 设该扇形的圆心角是 n° , 半径是 l (也就是说该圆锥的母线长是 l), 再设该圆锥的底面半径是 r . 则作为圆锥侧面展开图的扇形的弧长是 $\frac{n\pi l}{180}$, 而圆锥的底面周长是 $2\pi r$. 由这两者相等, 可得 $\frac{n\pi l}{180} = 2\pi r$, 消去 π , 并作整理可得

$$nl = 360r.$$

利用这个式子可以快速的解决相关的计算题.

例1 将一个底面半径为 5cm, 母线长为 12cm 的圆锥形纸筒沿一条母线剪开并展平, 所得的侧面展开图的圆心角是_____度.

解 底面半径 $r = 5$, 母线 $l = 12$, 由等式 $nl = 360r$, 得

$$n = \frac{360r}{l} = \frac{360 \times 5}{12} = 150.$$

例2 一个圆锥的侧面展开图是半径为 1 的半圆, 则该圆锥的底面半径是_____.

解 由条件可知: 母线 $l = 1$, 扇形的圆心角 $n = 180$, 故由方程 $nl = 360r$, 得

$$x + y = 4\sqrt{10}, \quad \textcircled{3}$$

解由 ①、③ 组成的方程组,

$$\begin{cases} xy = 30, & \textcircled{1} \\ x + y = 4\sqrt{10}, & \textcircled{3} \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x_1 = 3\sqrt{10}, \\ y_1 = \sqrt{10}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = \sqrt{10}, \\ y_2 = 3\sqrt{10}, \end{cases}$

又 G 为三角形的重心, 所以

$$FG = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\sqrt{10} \text{ 或 } FG = \frac{3}{2}\sqrt{10},$$

$$r = \frac{nl}{360} = \frac{180 \times 1}{360} = \frac{1}{2}.$$

例3 若一个圆锥的底面圆的周长是 $4\pi\text{cm}$, 母线长是 6cm, 则该圆锥的侧面展开图的圆心角的度数是()

- (A) 40° . (B) 80° .
(C) 120° . (D) 150° .

解 因为圆锥的底面圆的周长是 4π , 所以底面的半径 $r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$,

又因为母线 $l = 6$, 故由方程 $nl = 360r$, 得

$$n = \frac{360r}{l} = \frac{360 \times 2}{6} = 120.$$

故选(C).

例4 若一个圆锥的底面面积是侧面积的 $\frac{1}{3}$, 则该圆锥侧面展开图的圆心角度数是_____.

解 因为圆锥的底面面积 πr^2 , 侧面积是 πrl , 所以依题意, 得 $\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi rl$,

整理, 得 $\frac{r}{l} = \frac{1}{3}$.

由方程 $nl = 360r$, 得

$$n = \frac{360r}{l} = 360 \cdot \frac{r}{l} = 360 \times \frac{1}{3} = 120.$$

故圆锥侧面展开图的圆心角是 120° .

$$EG = \frac{1}{2}BG = \frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ 或 } EG = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

由勾股定理, 得

$$AB = 2BF = \sqrt{130} \text{ 或 } \sqrt{370},$$

$$AC = 2CE = \sqrt{370} \text{ 或 } \sqrt{130}.$$

由已知 $AC > AB$, 所以

$$AB = \sqrt{130},$$

$$AC = \sqrt{370}.$$