争　鸣

问　题

问题 236　一题三解，孰对孰错？

如图 1 所示，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A、D 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上移动，求 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的概率.

前期准备工作: 过 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E，过 C 作 $CF\perp y$ 轴于点 F，记样本空间为 Ω，"$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$"为事件 A.

解法 1　设 $OA=a$，则 $BE=DF=a$，因为 A、D 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上移动，所以 $a\in(0,1)$.

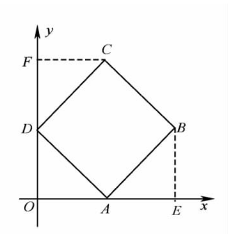

图 1

易求得 $AE=OD=CF=\sqrt{1-a^2}$，又 $OE=OA+AE=a+\sqrt{1-a^2}$，所以点 B 的坐标为 $(a+\sqrt{1-a^2},a)$.

同理可得 C 的坐标为 $(\sqrt{1-a^2},a+\sqrt{1-a^2})$，所以

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(a+\sqrt{1-a^2},a)\cdot(\sqrt{1-a^2},a+\sqrt{1-a^2})=(a+\sqrt{1-a^2})\cdot\sqrt{1-a^2}+a\cdot(a+\sqrt{1-a^2})=1+2a\sqrt{1-a^2}$.

所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 1+2a\sqrt{1-a^2}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2a\sqrt{1-a^2}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 16a^4-16a^2+3\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leqslant a^2\leqslant\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由上面过程可知: $\Omega=\{a\mid 0<a<1\}$，$A=\{a\mid\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}\}$，由几何概率公式得 $P(A)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{1-0}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

故所求概率为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

解法 2　设 $\angle BAE=\alpha$，则 $\angle ADO=\angle DCF=\alpha$. $\because$ A、D 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上移动，所以 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

又 $OE=OA+AE=\sin\alpha+\cos\alpha$，$BE=\sin\alpha$，所以点 B 的坐标为 $(\sin\alpha+\cos\alpha,\sin\alpha)$，同理 C 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha+\cos\alpha)$，所以

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=(\sin\alpha+\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha,\sin\alpha+\cos\alpha)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=1+\sin 2\alpha$.

由题意，事件 A 满足: $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $1+\sin 2\alpha\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$.

由上面过程可知: $\Omega=\{\alpha\mid 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\}$，$A=\{\alpha\mid\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}\}$，由几何概率公式得 $P(A)=\dfrac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}-0}=\dfrac{1}{3}$.

故所求概率为 $\frac{1}{3}$.

解法 3　同解法 2 的过程可知 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1+\sin 2\alpha$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\in(1,2]$.

又由题意，事件 A 满足: $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以，$\Omega=(1,2]$，$A=[1+\frac{\sqrt{3}}{2},2]$，由几何概率公式得

$$P(A)=\frac{2-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}{2-1}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

故所求概率为 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

以上三种解法看似都对,为何得到不同的结果,问题到底出在哪里,究竟孰对孰错?

张琴竽　徐传杰(湖北省枣阳市白水高中 441214)

评　　析

问题 233　一个关于函数解析式转换的问题.

本问题共收到评析稿件 20 篇,比较一致的意见是:两种解法得到不同答案,根本原因是题目本身有问题,题目给出的条件多余,破坏了条件的相容性,导致试题错误.

由条件 $f(x+1)=f(-x)$ 可知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,而当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ 的图象并不关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,事实上,显然有 $f(\frac{1}{3})\neq f(\frac{2}{3})$.

来稿前三名的作者是:王安寓(江苏省南京市六合区实验高级中学),连永欣(福建省福州市仓山区对湖路 15 号福建师大附中),林运来(福建省漳州开发区厦门大学附属实验中学).

选登 1

笔者认为,原题是病题.

题设有 4 个条件:①函数 $f(x)$ 的定义域为 R;②函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数;③函数 $f(x)$ 对任意 $x\in$ R 都有 $f(x+1)=f(-x)$;④当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

要解决的问题是:⑤研究函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内的单调性和正负性(符号).

分析 4 个条件:

①是说 $f(x)$ 对任意 $x\in$ R 都有意义;

②是说函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称(这其中也牵涉函数的单调性、最值等);

③是说函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称(这其中也牵涉函数的单调性、最值等);

④给出了函数 $f(x)$ 的一段(在 $x\in(0,1)$ 时)解析表达式(解析式给定,函数在区间 $(0,1)$ 上的单调性、最值、函数值的符号等都随之确定).

问题出在条件③与条件④不相容上. 容易看出条件④给出的函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 时的图象不关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称.

根据函数的对称性,可将该题中条件④和要解决的问题⑤进行修改,得如下问题:

新题 1　定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(-x)$,当 $x\in(0,\frac{1}{2}]$ 时,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$,则 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{3}{2})$ 内是　(　　)

(A) 增函数且 $f(x)>0$.

(B) 增函数且 $f(x)<0$.

(C) 减函数且 $f(x)>0$.

(D) 减函数且 $f(x)<0$.

新题 2　定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(-x)$,当 $x\in(0,1)$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}|\frac{1}{2}-x|, & x\neq\frac{1}{2},\\ 0, & x=\frac{1}{2},\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{3}{2})$ 内是　(　　)

(A) 增函数且 $f(x)>0$.

(B) 增函数且 $f(x)<0$.

(C) 减函数且 $f(x)>0$.

(D) 减函数且 $f(x)<0$.

从考查的对称性上思考,将条件②与条件③对调,条件④修改(可保持要解决的问题⑤不变),得如下问题:

新题 3　定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)+f(-x)=0$,当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}-x)$,则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内是　(　　)

(A) 增函数且 $f(x)$ 的值先正后负.

(B) 增函数且 $f(x)$ 的值先负后正.

(C) 减函数且 $f(x)$ 的值先正后负.

(D) 减函数且 $f(x)$ 的值先负后正.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

新题 1 和新题 2 的答案均为(D),新题 3 的答案为(C).

王安寓(江苏省南京市六合区实验高中 211500)

选登 2 细看之下,这道题的两种解法都没有问题,但却得到前后两个不同的解析式,只有一种可能:这道题是一道错题.为了更清楚的看出这点,我们做一番简单的推导.

当 $x\in(-1,0)$ 时,有 $x+1\in(0,1)$,$-x\in(0,1)$,则 $f(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}[1-(x+1)]=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$,$f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}[1-(-x)]=\log_{\frac{1}{2}}(1+x)$. $\because$ $f(x+1)=f(-x)$,$\therefore$ $\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_{\frac{1}{2}}(1+x)$.而函数 $\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,1)$ 上是单调递减函数,所以一定有 $-x=1+x$,$\therefore$ $x=-\frac{1}{2}$.也就是说,当 $x\in(-1,0)$ 时,只有当 $x=-\frac{1}{2}$ 时才有 $f(x+1)=f(-x)$ 成立,这就与题目的条件(对于任意的 x 都应该有 $f(x+1)=f(-x)$)矛盾.

上面的推导中我们并没有利用函数 $f(x)$ 是奇函数这一条件,因此可以想象 $f(x)$ 是奇函数与 $f(x+1)=f(-x)$ 这两个条件并不矛盾.事实上,我们可以构造一个函数 $f(x)=\sin\pi x$ 来说明这两个条件可以并存,显然它是一个奇函数,而且

$$f(x+1)=\sin[\pi(x+1)]=\sin(\pi x+\pi)$$
$$=-\sin(\pi x)=\sin[\pi(-x)]=f(-x).$$

现在我们知道题目的问题一定出在那个给定的解析式,若要使得题目不出错,就应该换一个解析式.

那么,当 $x\in(0,1)$ 时,函数 $f(x)$ 的解析式应该满足什么条件时,这道题才不会出错呢?首先,由 $f(x)$ 是奇函数可得 $f(0)=0$,再将 $x=0$ 代入条件 $f(x+1)=f(-x)$ 中,有 $f(1)=f(0)=0$;其次,在条件 $f(x+1)=f(-x)$ 中令 $x=u-\frac{1}{2}$,可得 $f(\frac{1}{2}+u)=f(\frac{1}{2}-u)$,由 u 的任意性可知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称.而 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$ 的图象在 $(0,1)$ 上并没有对称性,所以采用题目给出的解析式必然导致错误.

因此,为了使得题目不出错,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的解析式应该满足 $f(1)=f(0)=0$ 与图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称这两个条件才行(这可以看做题目不出错的必要条件,下面我们将说明这也是充分条件).事实上,在 $[0,1]$ 上任意给定一个满足 $g(1)=g(0)=0$ 并且图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称的函数 $g(x)$,都能利用函数的奇偶性(为奇函数)和周期性(解法 1 中已证周期为 2)"延拓"到整个实数集 $\mathbf{R}$ 上,"延拓"后的函数 $f(x)$ 满足题目的条件.

设 $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数,满足条件 $g(1)=g(0)=0$ 并且图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,下面我们将其"延拓"到实数集 $\mathbf{R}$ 上:$\forall x\in\mathbf{R}$,易知存在唯一的 $n\in\mathbf{Z}$ 和唯一的 $r\in\mathbf{R}$ 满足 $x=2n+r$,且 $-1<r\leqslant 1$.若 $r\in[0,1]$,则令 $f(x)=g(r)$;若 $r\in(-1,0)$,则令 $f(x)=-g(-r)$.

容易验证"延拓"后的函数 $f(x)$ 是奇函数且有 $f(x+1)=f(-x)$ 成立,验证过程稍显繁琐,这里从略.这样,我们可以在 $[0,1]$ 上给出满足这两个条件的解析式 $f(x)=ax(x-1)$(a 为非零常数),它是二次函数的一部分,它的对称轴正好就是直线 $x=\frac{1}{2}$.

我们最后来分析一下出题者的命题意图.显然,出题者不但想考察函数的奇偶性和周期性,而且还想在题中考察对数函数 $\log_{\frac{1}{2}}u$ 的单调性.为了实现出题者的意图,又为了让函数保有对称性,我们可以考虑将对数函数与二次函数复合,构造如下这个函数:当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}[x(x-1)+1]=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)$.显然这个函数解析式满足我们上面所分析的两个条件.从而,我们可以在保留选项不变的情况下将题目改成:

定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(-x)$,当 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)$,则 $f(x)$ 在区间 $(\frac{3}{2},2)$ 内是 ( )

邓超(福建省福州市第十八中学 350001)

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net