二探　思考往前一步,收获大进展.提出问题:若 $a=7$,问是否存在点 P,使得过 P 点有无数条互相垂直的直线 l_1、l_2 分别被圆 A、圆 B 截得的弦长之比为 $\frac{3}{4}$.若存在,请求出所有的 P 点坐标;若不存在,请说明理由.

如图 3,由前探可知,$\frac{AE}{BF}=\frac{3}{4}$.特别地,当 l_1 过 A 时,l_2 过 B.因此,$PA \perp PB$ 且 $\triangle AEP \backsim \triangle BFP$,即有 $\frac{AP}{BP}=\frac{3}{4}$.由 $PA \perp PB$ 可知点 P 在圆 $x^2+y^2=7^2$ 上,由 $\frac{AP}{BP}=\frac{3}{4}$ 可知点 P 在圆 $(x+25)^2+y^2=24^2$ 上,解得 $P(-\frac{49}{25},\frac{168}{25})$ 或 $P(-\frac{49}{25},-\frac{168}{25})$.

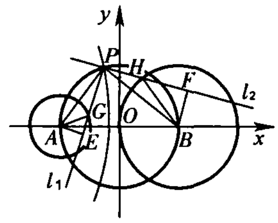

图 3

评注　一条直线变两条,解析法仍类似可解,而几何上的解决依然靠相似.值得一提的是,由点 P 满足 $\frac{AP}{BP}=\frac{3}{4}$ 得到的曲线是"阿波罗尼斯圆".

再探,叹形与数两相依,全面认识,辩证进步.有兴趣的同学可探索下面的问题.

在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AD=6$,$AB=2$,E、F 为 AD 的两个三等分点,AC 和 BF 交于点 G,$\triangle BEG$ 的外接圆为 $\odot H$,以 DA 所在直线为 x 轴、DA 中点 O 为坐标原点,建立如图 4 所示的平面直角坐标系.

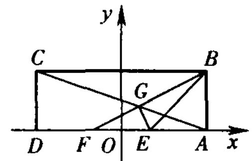

图 4

(1) 求以 F、E 为焦点,DC 和 AB 所在直线为准线的椭圆的方程;

(2) 求 $\odot H$ 的方程;

(3) 设点 $P(0,b)$,过点 P 作直线与 $\odot H$ 交于 M、N 两点,若点 M 恰好是线段 PN 的中点,求实数 b 的取值范围.

答案:(1) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$;(2) $(x-2)^2+(y-1)^2=2$;(3) $1-\sqrt{14} \leqslant b \leqslant 1+\sqrt{14}$.

(收稿日期:2010-04-29)

妙用函数巧解题

邓　超

(福建省福州市第十八中学,350001)

函数思想是中学数学中重要的数学思想之一,并在其中起到了举足轻重的作用.在许多难以入手的题目当中,通过适当地构造函数,利用函数的单调性、奇偶性等性质往往能使问题迎刃而解.出人意料的是下面一道有关二项式定理的问题中,通过引入函数可以使得问题得到巧妙的解决.

题目　在 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中,含 x 的奇次幂的项之和为 S,当 $x=\sqrt{2}$ 时,$S=$ ________.

解法 1　由二项式定理得:$(x-\sqrt{2})^{2006}=x^{2006}+C_{2006}^{1}x^{2005}\cdot(-\sqrt{2})+C_{2006}^{2}x^{2004}\cdot(-\sqrt{2})^2+\cdots+(-\sqrt{2})^{2006}$,

含 x 的奇次幂的项之和 $S=C_{2006}^{1}x^{2005}\cdot(-\sqrt{2})+C_{2006}^{3}x^{2003}\cdot(-\sqrt{2})^3+\cdots+C_{2006}^{2005}x\cdot(-\sqrt{2})^{2005}$.

$x=\sqrt{2}$ 时,$S=-(\sqrt{2})^{2006}(C_{2006}^{1}+C_{2006}^{3}+\cdots+C_{2006}^{2005})=-2^{1003}\cdot 2^{2006-1}=-2^{3008}$.

评注　解法 1 中的计算十分繁琐,而且用了一个不那么显然的一个结果:$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.下面用函数的思想给出另一个解法.

解法 2　设 $S(x)$ 等于 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中所有含 x 的奇次幂的项之和,$T(x)$ 等于 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中所有含 x 的偶次幂的项与常数项之和,于是有

$$(x-\sqrt{2})^{2006}=T(x)+S(x) \qquad ①$$

显然题中所求就是函数值 $S(\sqrt{2})$.又因为 $T(x)$ 是偶函数,$S(x)$ 是奇函数,所以 $T(-x)=T(x)$,$S(-x)=-S(x)$.现在分别将 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 代入 ① 中有:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{2})^{2006}=T(\sqrt{2})+S(\sqrt{2}) \qquad ②$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{2})^{2006}=T(-\sqrt{2})+S(-\sqrt{2})=T(\sqrt{2})-S(\sqrt{2}) \qquad ③$$

② - ③ 得:

$2S(\sqrt{2})=-(2\sqrt{2})^{2006}$,故 $S(\sqrt{2})=-2^{3008}$.

评注　解法 2 中将 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 表示成了一个偶函数和一个奇函数之和,从而使整个解题过程大大简化,而且整个解法也不依赖排列组合及二项式定理的任何结果.

(收稿日期:2010-06-10)